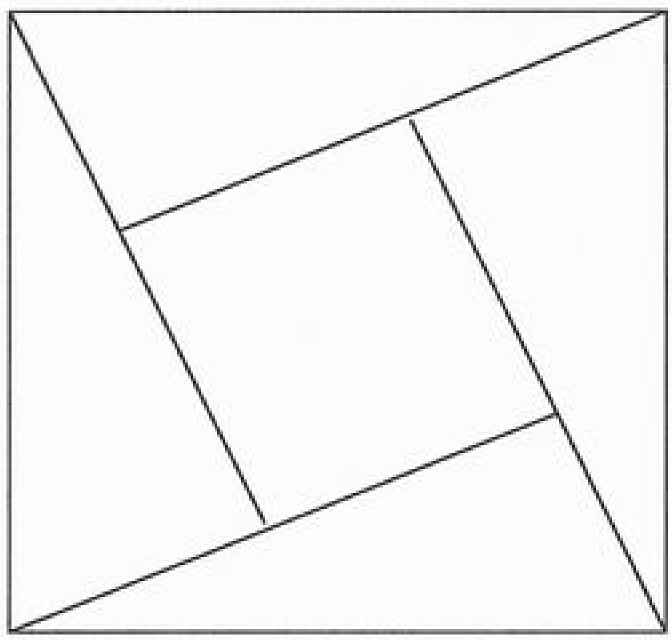
وزارة التربية
منطقة الفروانية التعليمية
ثانوي عبد اللطيف ثنيان العام للبنين
العام : 2000 / 2001م

نظرية فيثاغورث ...
تاريخ براهين تطبيق

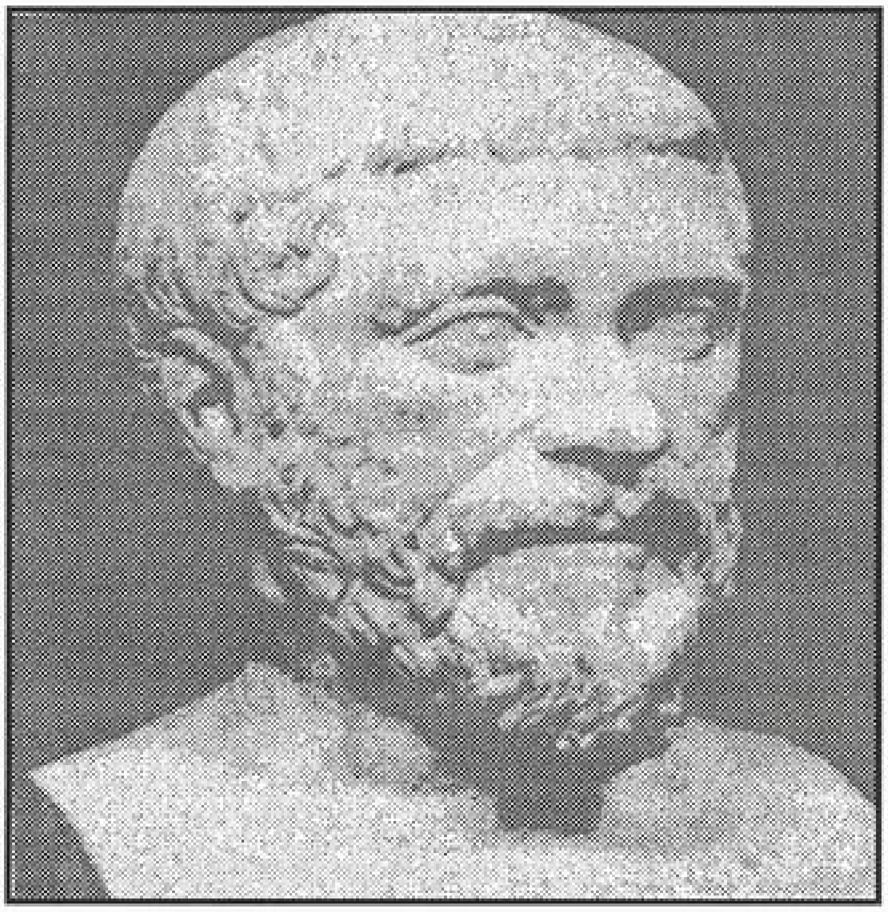


عمل الطالبان :
1) خالد مانع ١٤٤
2) فهد محسن

بإشراف قسم الرياضيات في المدرسة

﴿ فهرس البحث ﴾

نبذة تاريخية :



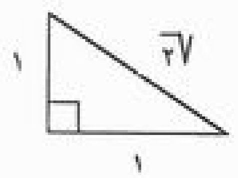
ولد فيثاغورث(٥٦٩ — ٥٠٠ ق.م.) في جزيرة ساموس (Samos) اليونانية وكان كثير الإسفار في دول حوض البحر الأبيض المتوسط. سافر إلى مصر لدراسة الرياضيات ، لأن مصر كانت مهد الحضارة الفرعونية العظيمة، وكما نعلم أن القدماء المصريين كان لهم باع طويل في علم الهندسة بسبب فيضان النيل الموسمي وبناء الأهرامات والمعابد .

لا يعرف كثيرا عن حياته، لكن اكتسب فيثاغورث شهرة كبيرة عندما كون بما يسمى جمعية (اخوة فيثاغورث) والتي كانت شبه جماعة سرية مهمتها دراسة الرياضيات ،لانه يعتقد أن الاعداد تتحكم بالكون ، ويقال أنه نحر ١٠٠ ثورا عندما اكمل برهان نظريته المشهورة . كتبت

جماعة فيثاغورث عدة براهين هندسية لهذه النظرية ، ولكن توجد صعوبة في اثبات من أوجد هذه البراهين هو أم طلابه .

ومن الأشياء التي يعزونها الى فيثاغورث اكتشافه للأعداد الغير نسبية ، وجاء ذلك عندما حاول إيجاد طول الوتر للمثلث القائم الزاوية والمتساوي الساقين . المثلث

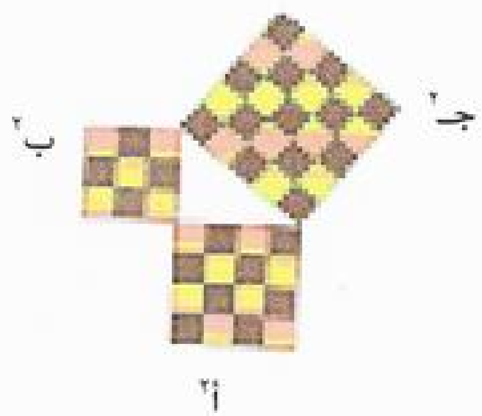
في شكل (١) طول الوتر فيه يساوي $\sqrt{٢}$ وحدة طول وهذا العدد لا يمكن التعبير عنه بعدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ حيث



شكل (١)

أن أ، ب إعداد صحيحة ، ب $\neq$ ٠ وهذه النتيجة لم تغير مفاهيم الرياضيات اليونانية فقط بل ايضا مفاهيم فيثاغورث الذي كان يعتقد أن الأعداد الصحيحة الموجبه والأعداد النسبية المكونة منها تعبر عن خواص هندسية مثل الطول والمساحة ،ويقال أنه أصيب بالإحباط لاكتشافه هذه الحقيقة، واضطر أن يحكم بالموت على أحد طلابه لأنه أفشى هذه الحقيقة للعامة؛ وظلت هذه المعضلة إلى أن جاء العالم اليوناني يوداكس (Eudaxas) بعد ٢٠٠ سنة ليوجد طريقه للتعامل مع هذه النوعية من الأعداد .

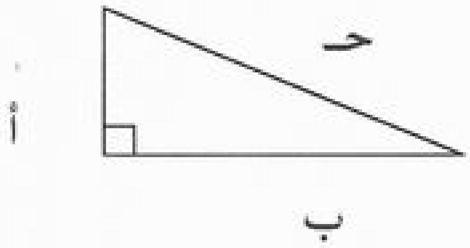
نظرية فيثاغورث من النظريات الأساسية في الهندسة الاقليديه



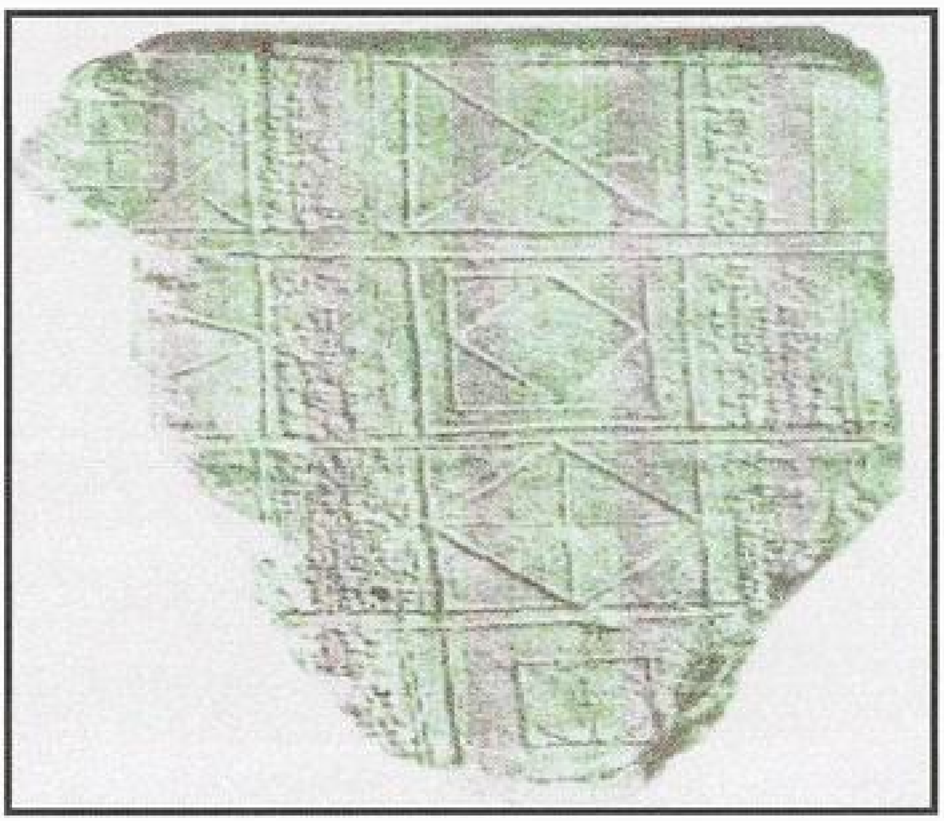
بهذه الورقة سوف نقوم بعرض بعض هذه البراهين :

نظرية فيثاغورث:-

في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر مساويا مجموع مربعي طولى الضلعين الآخرين ؟ أي أن : أ ^{٢} + ب ^{٢} = حـ ^{٢} أنظر شكل (٢)



العلاقـة السـابقة كانـت معروفة عند البابليون والصينيون القدماء منذ أكثر ١٦٠٠ ق ٠ م ، ولكن اكتشـاف فيـثاغورث لهـذه النظرية لا يمكن التنبؤ به بالدقة ، لكن اقليدس (٣٠٠ ق.م) ذكر في كـتابه المشـهور المسـمى " العناصر" ان فيثاغورث أعطى أول برهان هندسي لهذه النظرية . يذكر الدكـتور (W.Dunham) في كـتابه (Mathematical universe) أن البروفسـور (Elisha S.Loomis) يقـول انه هناك ما يقارب ٣٦٧ برهانا لهذه النظرية ونشرت هذه البراهين فى(National Council of Teachers) سنة ١٩٦٨ م . في هذه الورقة سوف نقوم باستعراض بعض هذه البراهين .



براهين النظرية :

• البرهان الأول:

يذكر المؤرخون أن هذا البرهان اكتشفه فيثاغورث . فكره هذا البرهان تعتمد على استخدام مربعين أحدهما مرسوم داخل الآخر كما في شكل (٣)

مساحة المربع الكبير = (أ+ ب) (أ +ب) = (أ+ب)^{٢}

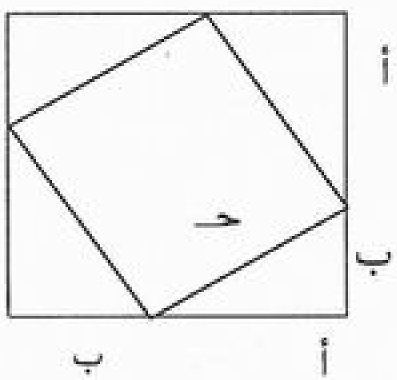
مساحة المربع الصغير = حـ . حـ = حـ^{٢}

مساحة △ = ½ أب

اذن مساحة المربع الكبير =مساحة المربع الصغير + ٤ مساحة △

أ^{٢} + ٢أب +ب^{٢} = حـ^{٢} + ٤ × ½ أب

أ^{٢} + ب^{٢} = حـ^{٢} □

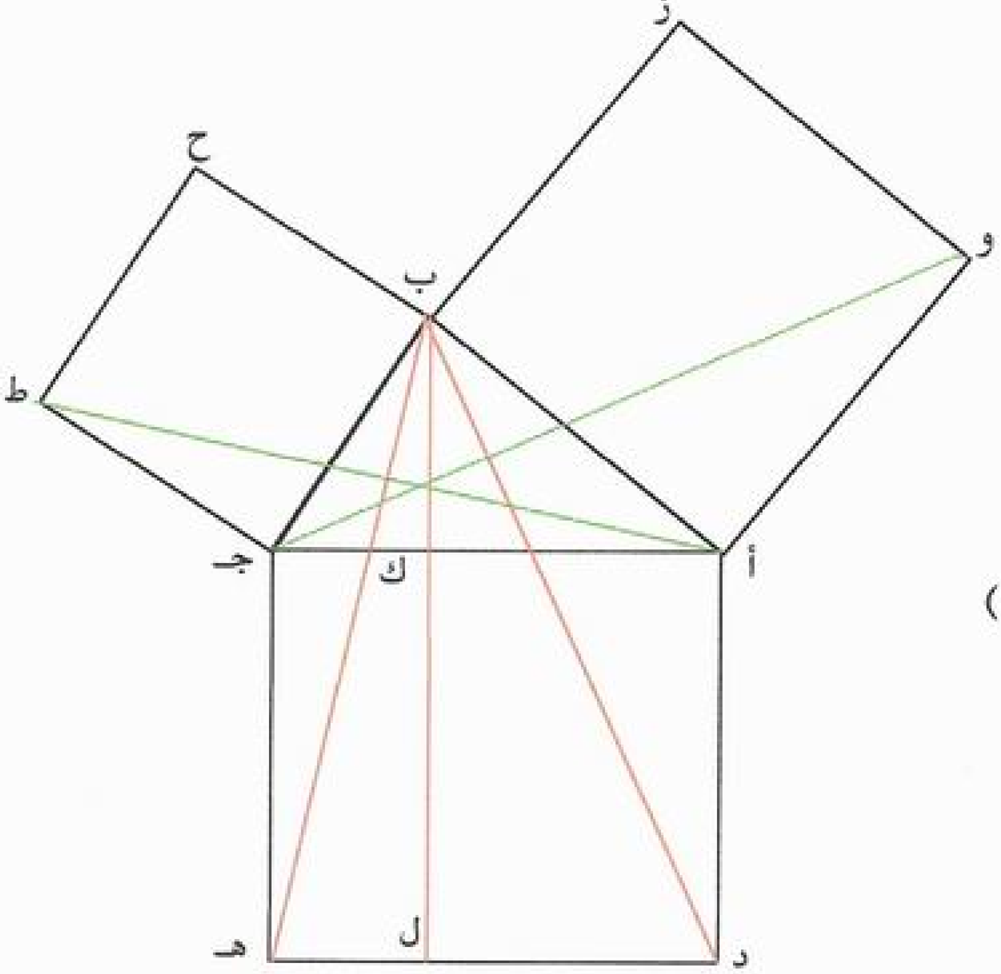


شكل (٣)

البرهان الثاني

هذا البرهان من اكتشاف الفنان والعالم الإيطالي : ليناردوداقش

eonardo Davinci (١٤٥٢ — ١٥١٩ م)



شكل (٤)

بالنظر إلى شكل (٤)

نجد أن .

مساحة △ أ د ب تساوي

½ مساحة المستطيل أد ل ك——— (١)

△ أ دب، △ أ و حـ متطابقان

لكن مساحة أ و حـ تساوي ½ مساحة المربع أ ب ز و --- (٢)

إذن من (١) ، (٢) نجد أن :

مساحة المستطيل أ د ل ك تساوي مساحة المربع أ ب ز و --- (٣)

وبنفس الطريقة :

مساحة △ ب حـ هـ تساوي ½ مساحة المستطيل ك ل هـ حـ --- (٤)

△ أ حـ ط، △ ب حـ هـ متطابقان .

كذلك مساحة △ أ حـ ط = ½ مساحة المربع ب حـ ط ح -- (٥)

إذن من (٤) ، (٥) نجد أن

مساحة المستطيل ك هـ ل جـ تساوي مساحة المربع ب حـ ط ح - (٦)

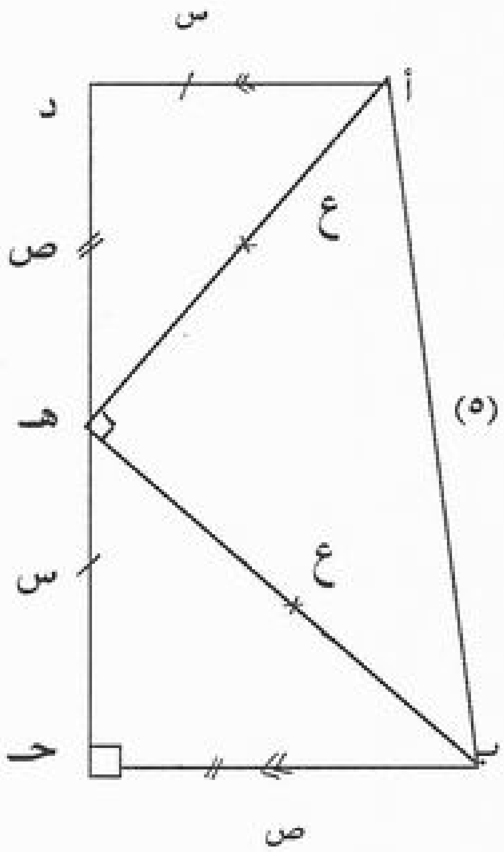
اذن من (٣) ، (٦) نجد أن .

مساحة المربع أ ب ز و + مساحة المربع ب حـ ط ح

= مساحة المستطيل أ د ل ك + مساحة المستطيل ك ل هـ حـ

= مساحة المربع أ د هـ حـ .

إذن (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٣} = (أ حـ)^{٢} □



شكل (٥)

البرهان الثالث

يذكر أن هذا البرهان من اكتشاف

جار فيلد (Garfield) رئيس الولايات المتحدة الأمريكية

سنة ١٨٧٦م.

في شكل (٥)

أ ب حـ د شبه منحرف قائم الزاوية فيه :

أد = هـ جـ = س

د هـ = ب جـ = ص

أ هـ = ب هـ = ع

إذن مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (س + ص) × (س + ص)

= $\frac{1}{2}$ (س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}) ---------- (١)

مساحة شبه المنحرف = مساحة △ أ د هـ + مساحة △ ب حـ هـ + مساحة △ أ ب هـ

= $\frac{1}{2}$ س ص + $\frac{1}{2}$ س ص + $\frac{1}{2}$ ع^{٢} ________(٥)

اذن س^{٢} + ص^{٢} = ع ٢ □

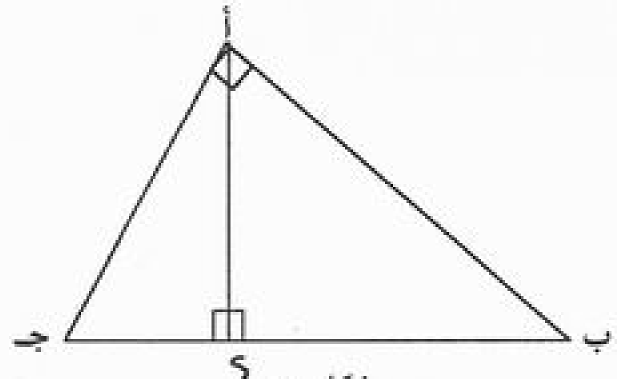
البرهان الرابع :-

في الشكل المقابل (٦):

أ ب حـ قائم الزاوية في $\hat{أ}$

$\overline{أ د} \perp \overline{ب حـ}$

اذن △ أ ب حـ يشابه كلا من △ د ب أ ، △ د أ جـ



شكل (٦)

ويتضح من التشابه :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د ب}}{\text{أ ب}}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{أ جـ}}$

إذن (أ ب)^٢ = (ب جـ) (د ب) ، (أ حـ)^٢ = (ب جـ) (د حـ)

إذن (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢ = (ب ج) (د ب) + (ب جـ) (د هـ)

= ب جـ) (ب د + د جـ)

= (ب جـ)^٢

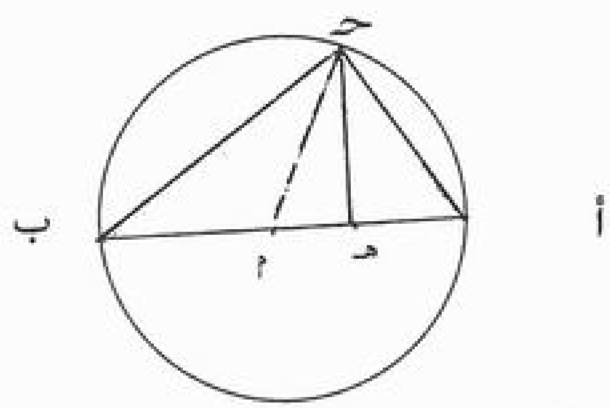
إذن (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢ = (ب جـ)^٢ □

<u>البرهان الخامس</u>

في شكل (٧) دائرة مركزها م ، $\overline{\text{حـ هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

اذن △ أ ب جـ قائم الزاوية ، حـ هـ ارتفاع

هذا المثلث



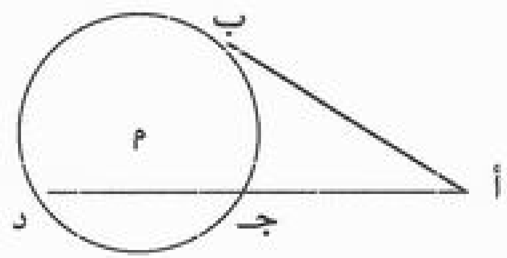
شكل (٧)

اذن كما في برهان (٤) نجد أن :

(حـ هـ)^٢ = (أ هـ) (هـ ب)

اذن (حـ هـ)^٢ = (حـ م − هـ م) (حـ م + هـ م)^٢

اذن (حـ هـ)^٢ + (هـ م)^٢ = (حـ م)^٢ □



البرهان السادس

ملاحظة

البرهان التالي يعتمد على نظرية

Power of the point theorem

في شكل (٨) اذا كانت أ نقطة خارجه

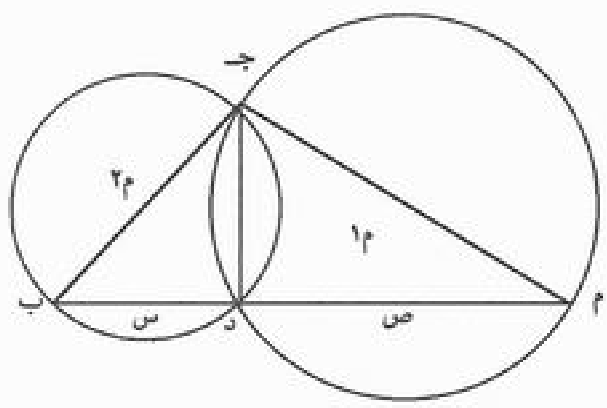
شكل (٨)

لدائرة م . من النقطة أ رسم المماس $\overline{\text{أب}}$ الذي

يمس الدائرة عند ب ، ثم رسمت $\overline{\text{أ د}}$

التي تقطع الدائرة في حـ ، د على الترتيب .

فيكون : (ا ب) ^{٢} = (أ جـ) (أ د)



شكل (٩)

في الشكل (٩)

△ أ ب جـ قائم الزاوية في حـ ، $\overline{\text{حـ د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

△ نفرض أن

ب د = س

أ د = ص

اذن ب نقطة خارجة للدائرة م ، $\overline{\text{ب جـ}}$ مماس لها

اذن (ب جـ) ^{٢} = س (س + ص) ———————— (١)

، أ نقطة خارجة للدائرة م $_{٢}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ مماس لها

اذن (أ حـ) ^{٢} = ص (س + ص) ^{٢} ————————— (٢)

من (١) ، (٢) وبالجمع

(ا حـ) ٢ + (ب جـ) ٢ = ص (س + ص) + س (س + ص)

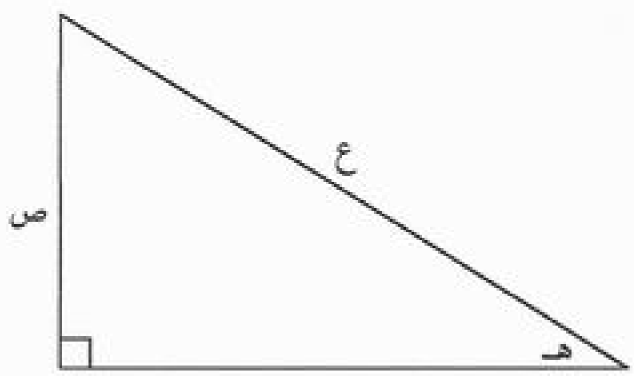
= (س + ص) (س + ص)

= (س + ص) ^{٢}

اذن (أ حـ) ^{٢} + (ب حـ) ^{٢} = (أ ب) ^{٢} $\square$

<u>البرهان السابع :</u>

في شكل (١٠) مثلث قائم



شكل (١٠)

اذن جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ع}}$

اذن س = ع جتاهـ

، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ع}}$

اذن ص = ع جاهـ

اذن س ^{٢} + ص ^{٢} = (ع جتاهـ)^{٢} + (ع جا هـ)^{٢}

= ع^{٢} جتا^{٢} هـ + ع^{٢} جا^{٢} هـ

= ع^{٢} (جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ)

= ع^{٢}

اذن مساحة $\triangle$ ز جـ د $= \frac{١}{٢} \times \text{بَ} \times \frac{\text{بَ}}{٢} = \frac{\text{ب}^{٢}}{٢}$

حـ ز . $\frac{\text{د هـ}}{٢} = \frac{\text{جـَ}}{٢} . \frac{\text{د هـ}}{٢} = \text{جـَ} . \frac{\text{د هـ}}{٤}$

$\therefore$ مساحة $\triangle$ ز جـ د $= \frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = \text{جـَ} . \frac{\text{د هـ}}{٤}$ .... (٣)

وبنفس الطريقة نجد أن:

مساحة $\triangle$ ز و حـ $= \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} = \text{حـَ} . \frac{\text{هـ و}}{٤}$ .... (٤)

بجمع طرفي (٣) ، (٤) نجد أن

$$\frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = \text{جـَ} . \frac{\text{هـ و}}{٤} + \text{جـَ} . \frac{\text{د هـ}}{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = \frac{\text{جـَ}}{٤} (\text{هـ و} + \text{د هـ})$$

$$\therefore \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = \frac{\text{جـَ}}{٤} . \text{جـَ}$$

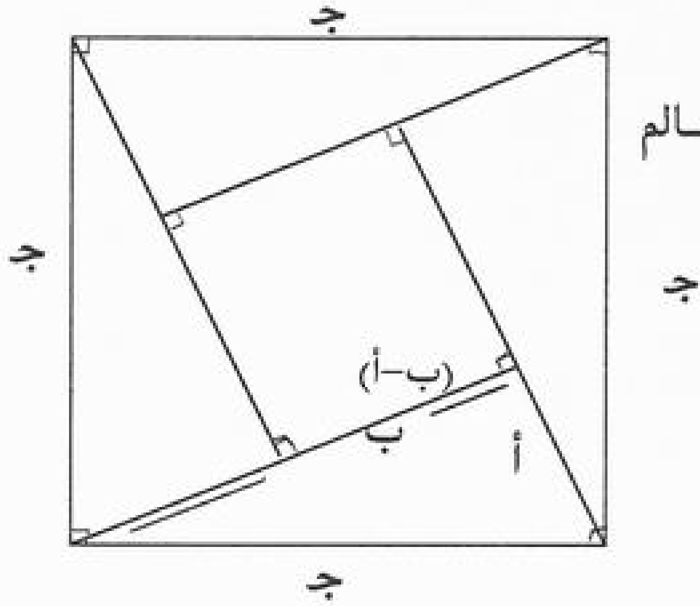
$$\therefore \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = \frac{\text{جـَ}}{٤}$$

$$\therefore \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} = \text{جـ}^{٢}$$

أي أن : $(\text{ب جـ})^{٢} + (\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ جـ})^{٢}$ □

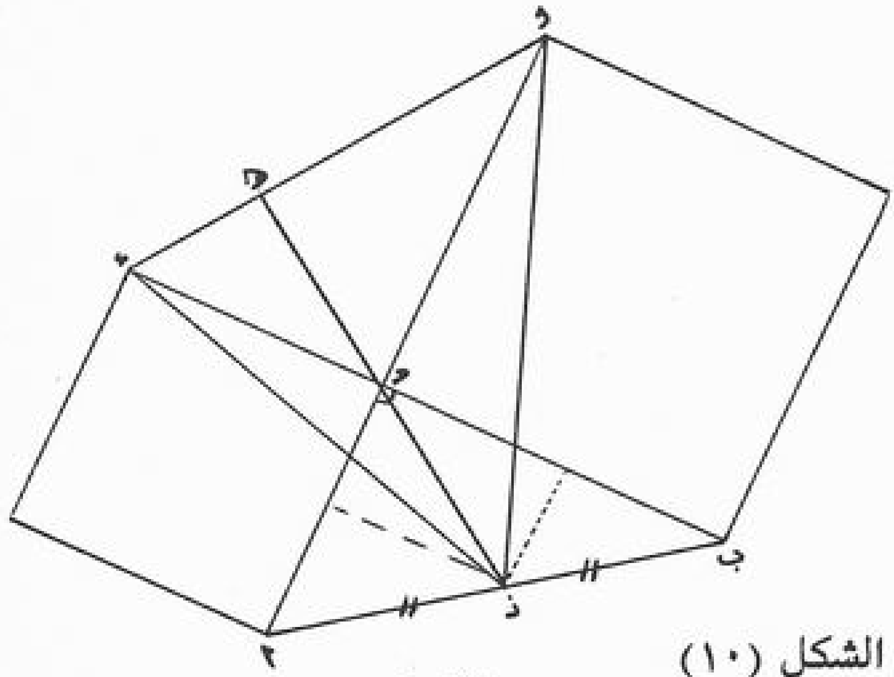
البرهان التاسع :-

هـــذا الــبرهان مـــن اكتشـــاف عـــالم الرياضيات الهندي : بهسكارا (Bhaskra) في القرن الثاني عشر الميلادي



شكل (١١)

اذن س٢ + ص ٢ = ع ٢ □



شكل ١٠

البرهان الثامن

في الشكل (١٠)

△ أ ب حـ قائم الزاوية في زاوية حـ^

ليكن أ ب = حـ/، ب حـ = أ/

أ حـ = ب/

نرسم المربعين على ب حـ ، أ حـ كما في الشكل (١٠)

اذن المثلث أ ب حـ يطابق المثلث حـ و د

ويكون ق > ودحـ = ق > أ ---- (١)

ليكن ز منتصف أ ب ونقطة تقاطع

ز حـ مع ود هي هـ .

المطلوب اولا برهان أن ز هـ عمودي على و د

اذن حـ ز = ½ أب ٠٠٠ لماذا ؟

اذن المثلث ب جـ ز متساوي الساقين ويكون ق > حـ ب ز = ق د ب جـ ز

لكن ق > ب حـ ز = ق > هـ حـ د بالتقابل بالرأس ٠٠٠ (٢)

اذن من (١) ، (٢) نجد أن:

المثلث حـ هـ د قائم الزاوية في حـ هـ^ د

اذن ز هـ ⊥ و د

بعد ذلك لنأخذ المثلث ز حـ د ، المثلث ز حـ و نجد أن

ارتفاع المثلث ز حـ د من النقطة ز يساوي ½ ب ٠٠٠ لماذا؟

بالنظر الى شكل (١١) نجد أن :

مساحة المربع الكبير = $\text{حـ}^{٣}$

مساحة ٤ مثلث = ٤ ($\frac{1}{2}$ أ ب) = ٢ أ ب

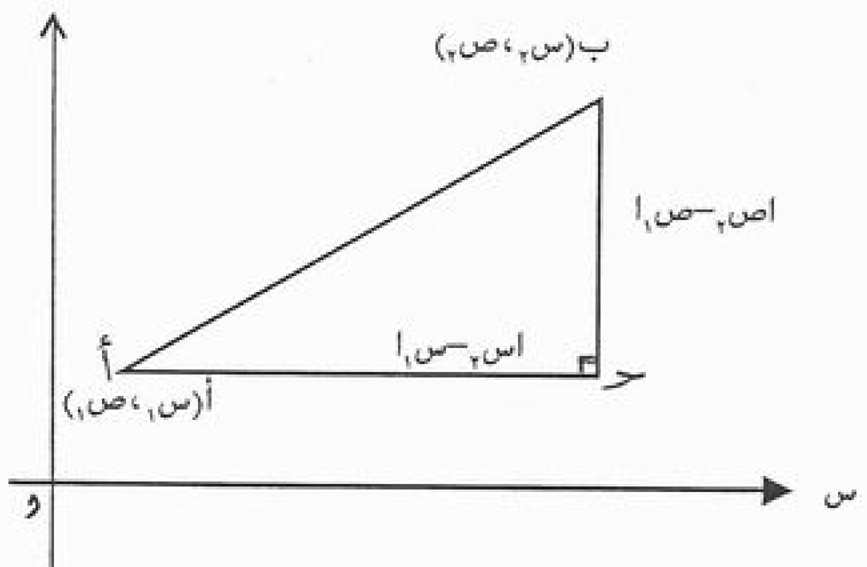
مساحة المربع الصغير = $(\text{ب}-\text{أ})^{٢}$ = $\text{ب}^{٢} - ٢\text{أب} + \text{أ}^{٣}$.

∴ مساحة المربع الصغير + ٤ مساحة المثلث = مساحة المربع الكبير .

∴ $\text{ب}^{٢} - ٢\text{أب} + \text{أ}^{٢} + ٢\text{أب} = \text{جـ}^{٢}$

∴ $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} = \text{جـ}^{٢}$ □

التطبيقات لنظرية فيثاغورث :



شكل (١٢)

أولا : البعدين نقطتين في المستوى الأجرائي المتعامد

∴ $|\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}| = \text{س}_{٢} - \text{س}_{١}$

$|\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}| = \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}$

∴ $(\text{أب})^{٢} = (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}$ ... نظرية فيثاغورث

∴ $\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

ثانيا : ميل المستقيم :

من الشكل (١١) نجد أن

$$\text{ميل } \overline{\text{أب}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \text{ظا} \angle \text{ ب أ جـ .}$$

﴿ الهوامش ﴾

(1) www.mathforum.eom

(2) www.pythagoreantheorem.com

(3) encyclopedia BritannieU.3

(4) What is mathematic By
R. courant
H. Robbins
Oxford University Press 1973