ثانوية احمد البشر الرومي

قسم الرياضيات
تدريب ميداني

الـمـوضـوع:

الــلـوغـاريـتـمـات

اعداد أ/ محمد عبدالسميع

رئيس القسم أ/ سمير مرسي

الموجــه الفنــي أ/ كــارم عطية

محتويات الموضوع

نبذة تاريخية عن تاريخ اللوغاريتمات:

طريقة رياضية لحل مسألة باستخدام أسلوب حسابي أبسط بشكل متكرر. ومن الأمثلة الواضحة على ذلك عملية القسمة المطولة في الحساب.

ولقد جاء علم اللوغاريتمات متأخرا عن معظم العلوم الرياضية الأولية باعتباره معتمدا عليها. وحيث أن الفكرة الأساسية لهذا العلم تعتمد على تحويل عمليتي الضرب والقسمة المعقدتين إلى عمليتي جمع وطرح، فلقد كان الوصول إليها متزامنا من عدة أوجه. ففي القرن الخامس الهجري / الحادي عشر الميلادي وضع ابن يونس قانونه المعروف في علم حساب المثلثات الذي يقضي بتحويل عملية الضرب إلى عملية جمع. وكان القانون على الصيغة التالية:

جتا أ جتا ب =2/1 [جتا (أ + ب) + جتا (أ- ب)]

وهو الذي يقضي بتحويل عملية الضرب إلى عملية جمع، فكان بذلك واضعا أول حجر في تطوير علم اللوغاريتمات.

وفي القرن العاشر الهجري / السادس عشر الميلادي توصل ابن حمزة المغربي إلى إيجاد العلاقة بين المتواليتين الحسابية والهندسية. وقد شكلت نتائجه هذه حجر الأساس الذي اعتمد عليه العالم نابير الأسكتلندي لتطوير علم اللوغاريتمات.

ويطلق مصطلح اللوغاريتمات الآن على أنواع عديدة من حل المشاكل باستخدام سلسلة من الخطوات الميكانيكية كما هو الحال في تنصيب برنامج كمبيوتر. وقد تعرض هذه السلسلة في مخطط مسار البرنامج بحيث يسهل اتباع الخطوات الواردة بها.

وكما هو الحال في اللوغاريتمات المستخدمة في الحساب، تتراوح اللوغاريتمات المستخدمة في الكمبيوتر بين البساطة والتعقيد الشديد، إلا أنه يجب تحديد المهمة التي ينبغي للوغاريتمات أن تؤديها على أي حال من الأحوال، بمعنى أنه قد يحتوي التعريف على مصطلحات رياضية أو منطقية أو تجميع للبيانات أو التعليمات المكتوبة، ولكن يجب أن تكون المهمة المطلوبة ذاتها مذكورة بطريقة أو بأخرى. وباستخدام مصطلحات الكمبيوتر المعتادة، فإن هذا يعني أنه يجب أن تكون اللوغاريتمات قابلة للبرمجة حتى ولو ثبت أن المهام نفسها لا يمكن الوصول فيها لحل.

وفي أجهزة الكمبيوتر المركب بها دائرة كمبيوتر دقيقة، تعتبر هذه الدائرة نوعا من أنواع اللوغاريتمات. وحيث أن أجهزة الكمبيوتر تزداد تعقيدا ، فإن عددا أكبر وأكبر من لوغاريتمات برامج

الكمبيوتر تأخذ شكل ما يعرف باسم البرامج التي تتحكم في الأجهزة، بمعنى أنها تصبح جزءا من دائرة الكمبيوتر الأساسية أو أنها تكون ملحقات ترفق بالجهاز بسهولة أو أنها تكون بمفردها في أجهزة خاصة مثل ماكينات جدول الرواتب في المكاتب. والآن هناك أنواع كثيرة مختلفة من لوغاريتمات البرامج التطبيقية كما أن نظما متقدمة جدا مثل لوغاريتمات الذكاء الاصطناعي قد تصبح من الأمور الشائعة في المستقبل

الان ماهى اللوغاريتمات:

اللوغاريتمات أرقام يُطلق عليها في علم الجبر اسم الأدلة أو الأُسس. ويستخدم الأُس للتعبير عن تكرار ضرب رقم واحد. فعلى سبيل المثال، يمكن كتابة 2×2×2 في هيئة 2^3. والرقم 3 في المعادلة: $(2)^3 = 8$ هو الأُس، أما الرقم 2 فهو الأساس. وبمصطلحات اللوغاريتمات، فإن 3 هو لوغاريتم الرقم 8 للأساس 2.

ويمكن كتابة هذه العبارة كما يلي: لو$_3$(8) = 3.

والمعادلة لو$_3$(8) = 3. هي أسلوب آخر للتعبير عن$(2)^3 = 8$. وبصفة عامة،

(أ)^{س} = ب $\Leftrightarrow$ لو$_3$ (ب) = س بشروط معينة ندرسها فيما بعد

فالصورة (أ)^{س} = ب تمكنا من حساب قيمة ب لجميع قيم س المناظرة اذا علمت قيمة أ

اما الصيغة لو$_أ$ (ب) = س تمكنا من حساب قيمة س (الاس) اذا علم قيمتي أ ، ب

قوانين اللوغاريتمات :

كاي علم فان هناك عدة خواص وقوانين تحكم علم اللوغاريتمات تمكنا من سهولة استخدامه في حل المشكلات الرياضية .

من خلال الصيغتين $(أ)^{س}$ = ب ، لوأ (ب) = س حيث أ ، ص ∋ ح$^{+}$ ، أ ≠ 0 ، س ∋ ح

يمكن استنتاج بعض المتطابقات الهامة

- بالتعويض عن س من الصيغة اللوغاريتمية في الصيغة الاسية

$أ^{لوأ (ب)}$ = ب

- بالتعويض عن ب من الصيغة الاسية في الصيغة اللوغاريتمية

لوأ $(أ)^{س}$ = س هامة لاثبات القوانين الاخري

- وحيث ان $أ^{صفر}$ = 1 ، $أ^{1}$ = أ فان

لوأ (1) = صفر

لوأ (أ) = 1

قوانين اللوغاريتمات :

نظرا لان اللوغاريتمات عبارة عن اسس فان جميع قوانين الاسس وخواصها تنطبق عليها

فلو فرضنا ان لوأ س = م ، لوأ ص = ن فان س = $أ^{م}$ ، ص = $أ^{ن}$

(1) لوأ (س ص) = لوأ$(أ^{م} \times أ^{ن})$ = لوأ $(أ^{م + ن})$ = م + ن = لوأ س + لوأ ص

(2) لوأ (س ÷ ص) = لوأ$(أ^{م} \div أ^{ن})$ = لوأ $(أ^{م - ن})$ = م – ن = لوأ س - لوأ ص

(3) لوأ $(س)^{ن}$ = لوأ $(أ^{م})^{ن}$ = لوأ $(أ)^{م \times ن}$ = م × ن لوأ (أ) = م × ن = ن لوأ (س)

استخدامات اللوغاريتمات:

نشر عالم الرياضيات الأسكتلندي جون نبيير أول بحث وجدول للوغاريتمات عام1614م. وقد اكتشف السويسري جوبست برجي اللوغاريتمات على نحو مستقل في نفس الوقت تقريبًا. وفي أوائل القرن السابع عشر، قدم الإنجليزي هنري برجز للرقم الأساسي 10، وبدأ في وضع جدول به 14 خانة للوغاريتمات العشرية، ثم أكمل الهولندي أدريان فلاك العمل الذي بدأه برجز.

وحوالي عام 1622م، وضع الإنجليزي إدموند جَنتر، تصورًا لفكرة كتابة الأعداد على مستطيلات رفيعة وفقًا للوغاريتم الخاص بكلٍ منها، وضربها وقسمتها عن طريق انزلاق مستطيل على الآخر. وتمثل هذه الفكرة أساس المسطرة المنزلقة.

استمر استخدام جداول برجز- فلاك حتى تم وضع جداول لوغاريتمات عادية بها 20 خانة في بريطانيا في الفترة بين 1924 و1949م وتستخدم اللوغاريتمات في

1- الضرب. لضرب رقمين باستخدام اللوغاريتمات، ابحث عن اللوغاريتم الخاص بكل من الرقمين في الجدول، واجمع هذين اللوغاريتمين للحصول على لوغاريتم حاصل ضرب هذين الرقمين، ثم ابحث عن الرقم الذي يكون لوغاريتمه هو لوغاريتم حاصل ضرب الرقمين، مستخدمًا الجدول مرة أخرى.

2-القسمة. لقسمة رقم على آخر، ابحث عن اللوغاريتم الخاص بكلٍ من الرقمين في الجدول، واطرح لوغاريتم المقام من لوغاريتم البسط، ثم استخدم الجدول مرة أخرى لمعرفة الرقم الذي يكون اللوغاريتم الخاص به هو لوغاريتم حاصل عملية الطرح هذه. هذا الرقم هو حاصل القسمة المطلوب.

3- رفع الرقم إلى قوة معينة. لكي ترفع رقمًا إلى قوة معينة، ابحث في الجدول عن لوغاريتم هذا الرقم واضرب هذا اللوغاريتم في أُس القوة، ثم ابحث في الجدول عن الرقم الذي يكون اللوغاريتم الخاص به هو نفس لوغاريتم حاصل عملية الضرب هذه. هذا الرقم هو القوة المطلوبة للرقم الأول.

4- إيجاد الجذر. لمعرفة جذر رقم ما، ابحث عن لوغاريتم الرقم في الجدول، واقسم هذا الرقم على أُس الجذر، ثم استخدم الجدول مرة أخرى لمعرفة الرقم الذي يكون اللوغاريتم الخاص به مساويًا لحاصل عملية القسمة، ويكون هذا هو الجذر المطلوب للرقم. انظر: الجذر؛ الجذر التربيعي .

اللوغاريتم المعتادة واللوغاريتم الطبيعي :

- اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم للاساس **10** ويرمز له بالرمز لو بدون كتابة الاساس
- اللوغاريتم الطبيعي هو لوغاريتم للاساس e حيث e = 2.7 تقريبا وهي تشبة النسبة التقريبية π ويرمز له بالرمز لط

ملاحظة:

العدد e هو مجموع المتسلسلة التقاربية

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828$$

وتعرف كذلك بانها

$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ والتي يمكن اثباتها باستخدام نظرية ذات الحدين

ونظرا لخواص العدد e فانه يوخذ كاساس للوغاريتم وتسمى احيانا اللوغاريتم النابيرية نسبة الي العالم نابير

الدالة اللوغاريتمية:

الدالة د(س) = لو$_{أ}$ (س) تسمى دالة لوغاريتمية اساسها أ ومنها يمكن ان نكتب

ص = لو$_{أ}$ (س) ⇔ س = أ^{ص} وهذه هي الدالة العكسية للدالة الاسية (ص = أ^{س})

ولو اعتبرنا د(س) = لو$_{أ}$ (س) ، هـ(س) = أ^{س} فانه يمكن اثبات ان الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الآسية والعكس وذلك باستخدام التركيب (يمكن تركيب د o هـ ، هـ o د)

(د o هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(أ^{س}) = لو$_{أ}$ (أ^{س}) = س

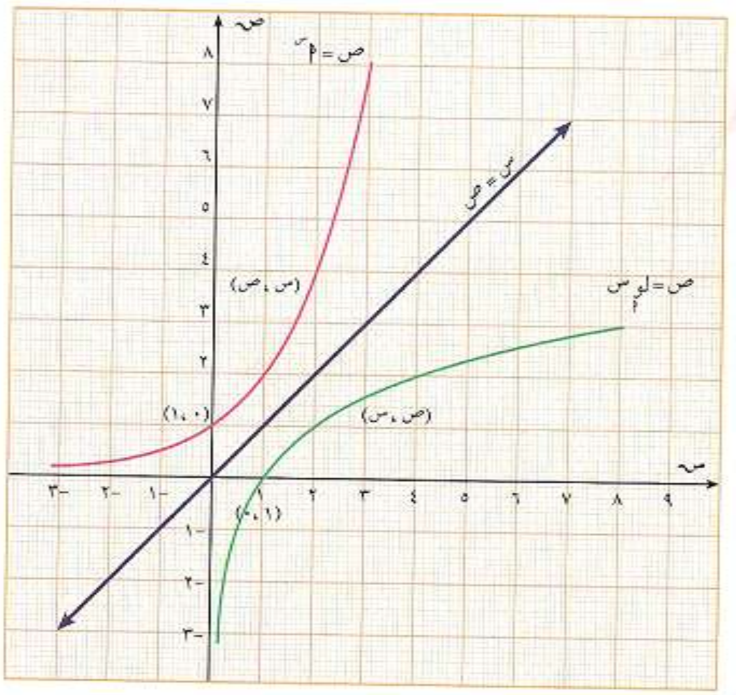
(هـ o د)(س) = هـ(د(س)) = هـ(لو$_{أ}$ (س)) = أ$^{لو_{أ} (س)}$ = س

ومعلوم ان تركيب دالة مقابلة مع نظيرتها يعطي الدالة المحايدة (ق(س) = س)

∴ أي ان الدالة اللوغاريتمية هي صورة الدالة الاسية بانعكاس

حول المستقيم ص = س

والشكل التالي يمثل بيان كلا من الدالتين الاسية واللوغاريتمية معا



ويمكن استنتاج الخواص الاتية للدالة اللوغاريتمية من الرسم السابق

(1)مجال الدالة اللوغاريتمية هو (0، ∞)

(2)مدي الدالة اللوغاريتمية هو ح

(3) لوأ (س) > 0 ∀ س > 1

(4)لوأ (س) < 0 ∀ 0< س < 1

(5)لوأ (س) = 0 عند س = 0

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

تسمي الدالة اللوغاريتمية للاساس e بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية

ويرمز لها بالرمز د(س) = لط س

ومنحناها هو نفس منحني الدالة الاسية الطبيعية د(س) = $e^{س}$

بالانعكاس في المستقيم ص = س

إضــــافة

التكامل $\int_{1}^{س} \frac{1}{ن}\, ءن$ ، ن $\in$ ح$_+$

= المساحة تحت منحني الدالة د(ن)= $\frac{1}{ن}$ **لكل س > 0**

ويساوي سالب المساحة تحت منحني الدالة د(ن)=$\frac{1}{ن}$ **لكل س $\in$ (0، 1)**

∴ يتعين لكل قيمة ل س $\in$ ح$_+$ قيمة وحيدة للتكامل $\int_{1}^{س} \frac{1}{ن}\, ء ن$

وعليه فان التكامل السابق يمثل دالة جديدة نطلق عليها دالة اللوغاريتم الطبيعي

ويرمز لها بالرمز د(س) = لط س

وبالتالي فان الدالة د(س) = لط س هي دالة مقابلة للدالة هـ(س) =

ومن خلال الخواص التفاضلية ودراسة التزايد والتناقص

يمكن استنتاج بيان الدالة د(س) = لط س

مسائل وتمارين على اللوغاريتمات

(اولا) اوجد قيمة كلا من

(1) $3^{\text{لو}_3 (75)}$

(2) لو_{64} (5و.)

(3) $\text{لو}_5 (3) \times \text{لو}_3 (5)$

= =

(ثانيا) اوجد مجموعة حل المعادلات الاتية

(1) لو_2 س + 4 لو_4 (س^2) – 9 = 0

(2) 3 $\text{لو}_{\text{س}}$ (3) + لو_3 (س) = 4

(3) س + ص = 5 ، لو س + لو ص = 5؛!

(4) 4 $\text{لو}_{\text{س}}$ 2 + لو_2 س = 5

= =

(ثالثا) اثبت ان اذا كانت أ ، ب ، س اعداد حقيقية موجبة ، أ $\neq$ 1، ب $\neq$ 1 فانه

$$\text{لو}_{\text{ب}}(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س})}{\text{لو}_{\text{أ}}(\text{ب})}$$

= =

(رابعا):متتالية هندسية حدها اللامي يساوي أ وحدها الميمي يساوي ب وحدهاالنوني يساوي جـ

اثبت ان (م – ن) لو أ + (ن – ل) لو ب + (ل – م) لو جـ = صفر

= ==

(خامسا):بين فيما اذا كانت الدالة د(س) = لو([[س@:+:1 : + س) زوجية ام فردية ام غير ذلك

(سادسا) اذا كان أ،ب، جـ ، د متتالية هندسية فاثبت ان

لوأ/لوب = (لو جـ+ لوأ)/(لو د + لو ب)

= =

(سابعا) اوجد مجموعة حل المعادلة

لو$_{س}$ 81 - لو$_{2س}$ 36 = 2